

**La fonction logarithme népérien :**

La fonction logarithme népérien notée  $\ln$  est l'unique fonction, définie et dérivable sur  $]0, +\infty[$  [et Vérifiant  $\ln 1 = 0$

et pour tout réel  $x > 0$ ,  $(\ln x)' = \frac{1}{x} > 0$

Il est continu et strictement croissant sur  $]0, +\infty[$ .

Premières propriétés (directement liées à la définition)

Pour tous réels :  $\forall x > 0 ; \forall y > 0 ; \forall r \in \mathbb{Q}$

1)  $\ln x = \ln y \Leftrightarrow x = y$     2)  $x \leq y \Leftrightarrow \ln x \leq \ln y$

3)  $\ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$     4)  $\ln x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$

5)  $\ln(x \times y) = \ln x + \ln y$     6)  $e \approx 2,71828 \dots$  et  $\ln(e) = 1$

7)  $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$     8)  $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$

9)  $\ln\sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$     10)  $\ln(x^r) = r \ln x$

11)  $\ln(e^x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$     12)  $(e^{\ln x} = x) \quad (\forall x > 0)$

13)  $e^x = y \Leftrightarrow x = \ln y \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \forall y > 0$

**(Limites usuelles)**

1)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$     2)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$

3)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

4)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^r} = 0$  (où  $r \in \mathbb{Q}_*^+$ )

5)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^r \ln x = 0$  (où  $r \in \mathbb{Q}_*^+$ )

6)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$

7)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

**Dérivée et primitives de la fonction  $x \rightarrow \ln(u(x))$**

1) Si  $u$  est une fonction dérivable sur  $I$  et ne s'annule pas sur  $I$  alors la fonction :  $f(x) = \ln(|u(x)|)$  est dérivable sur  $I$

et  $(\forall x \in I) (f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)})$

2) Si  $u$  est une fonction dérivable sur  $I$  et ne s'annule pas sur

$I$  alors les fonctions primitives de la fonction  $x \rightarrow \frac{u'(x)}{u(x)}$  sont

les fonctions :  $F(x) = \ln(|u(x)|) + Cte$

**FONCTIONS LOGARITHMIQUES DE BASE  $a$**

Soit  $(a > 0)$  et  $(a \neq 1)$

On note  $\log_a$  la fonction logarithmique de base  $a$

définie sur  $]0, +\infty[$  par :  $(\forall x \in ]0, +\infty[) (\log_a = \frac{\ln x}{\ln a})$

$\forall x > 0 ; \forall y > 0 ; \forall r \in \mathbb{Q}$

1)  $\log_a(x \times y) = \log_a x + \log_a y$     2)  $\log_a(1/x) = -\log_a x$

3)  $\log_a(x/y) = \log_a x - \log_a y$     4)  $\log_a(\sqrt{x}) = (1/2)\log_a x$

5)  $\log_a(x^r) = r \log_a x$

6)  $\log_e = \frac{\ln x}{\ln e} = \ln x$

$\forall x \in ]0, +\infty[ ; (\log_a(x))' = \frac{1}{x \ln a}$  donc La fonction  $\log_a$

est une bijection de  $]0, +\infty[$  vers  $\mathbb{R}$

1)  $(\forall x > 0)(\forall y > 0) (\log_a(x) = \log_a(y) \Leftrightarrow x = y)$

2)  $(\forall x > 0)(\forall r \in \mathbb{Q}) (\log_a(x) = r \Leftrightarrow x = a^r)$

3)  $\log_a$  strictement croissante si  $(a > 1)$

$\log_a$  strictement décroissante si  $(0 < a < 1)$

**Cas particulier  $a = 10$  ; logarithme décimal :**

La fonction logarithmique de base 10 s'appelle la fonction logarithmique décimal et se note par **log** et  $(\forall x \in ]0, +\infty[)$

$(\log x = \frac{\ln x}{\ln 10})$  et on a :  $\log(10) = 1$

1)  $(\forall x > 0)(\forall r \in \mathbb{Q}) (\log(x) = r \Leftrightarrow x = 10^r)$

2)  $(\forall r \in \mathbb{Q}) (\log(10^r) = r)$     3)  $\log(x) > r \Leftrightarrow x > 10^r$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »

Dit un proverbe.

